Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M6 – Veränderungen/Abl - Selbsteinschätzung**	Datum:

In diesem Modul werden die Änderungsraten von Funktionen untersucht, d.h., es wird analysiert, ob Graphen steigen oder fallen bzw. wie steil sie steigen oder fallen. Bevor du anfängst zu üben, solltest du eine spontane Selbsteinschätzung in Form einer Schulnote von 1 bis 6 ab (erste Spalte in der Tabelle).
Anschließend kannst du in deinem Lerntagebuch die Testaufgaben bearbeiten und mithilfe der ausführlichen Musterlösungen auswerten. So erkennst du deine Stärken und Schwächen und kannst gezielt die Standard- und die vertiefenden Aufgaben zu diesem Modul üben.

Selbsteinschätzung

	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Testaufgaben	SE nach Bearbeitung des Moduls
1. Ich kann an den Graphen einer ganzrationalen Funktion eine Tangente zeichnen und deren Gleichung (näherungsweise) ablesen.			
2. Ich kann die Ableitung einer ganzrationalen Funktion nach den Ableitungsregeln bestimmen.			
3. Ich kann mithilfe der Ableitung die Gleichung einer Tangente an den Graphen einer ganzrationalen Funktion berechnen.			
4. Ich kann anhand des Graphen einer Funktion erkennen, wo die zugehörige Ableitung positiv bzw. negativ ist.			
5. Ich kann den Graphen der Ableitungsfunktion skizzieren, wenn der Graph der Ausgangsfunktion gegeben ist.			
6. Ich kann beschreiben, welche Bedeutung die Ableitung einer Funktion hat, wenn f einen Sachzusammenhang beschreibt.			
7. Ich kann die durchschnittliche Änderungsrate einer Funktion innerhalb eines Intervalls sowie die momentane Änderungsrate an einer Stelle berechnen.			
8. Ich kann untersuchen, an welchen Stellen die Ableitung einer gegebenen Funktion ihr Vorzeichen ändert, und daraus Schlussfolgerungen für den Verlauf des Graphen ziehen.			

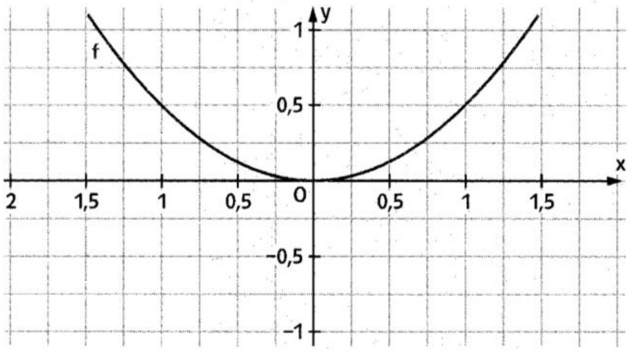
Viel Erfolg

Ma Jg: Ab: Vertiefungsfach Mathe Sj:

Name: **M6 – Veränderungen/Abl - Testaufgaben** Datum:

Die Aufgaben 1 – 8 beziehen sich auf die Punkte 1 – 8 der Selbsteinschätzung. Bearbeite die Aufgaben und kontrolliere dann deine Lösung mithilfe der Musterlösungen auf den folgenden Seiten.

1 Zeichne die Tangente an den Graphen im Punkt P(1 | 0,5) ein und bestimme die zugehörige Geradengleichung.



Tangentengleichung: $t(x) =$ ____________________

2 Bestimme jeweils die erste Ableitung.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$

____

b) $f(x) = (x + 7)(x - 7)$

____

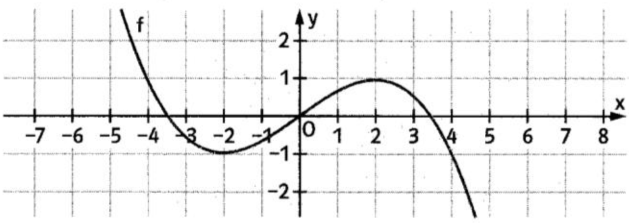
c) $f_a(t) = a t^3 + t$

____

3 Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von f mit $f(x) = 2x^3 - x + 1$ in $P(2 \mid f(2))$.

$t(x) =$ ____________________

4 Gib die Bereiche an, in denen die Ableitung der Funktion f positiv bzw. negativ ist.



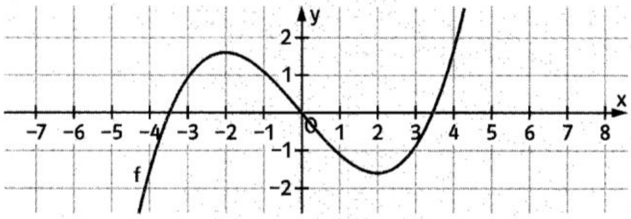
Ableitung positiv: ____________________

____

Ableitung negativ: ____________________

____

5 Der Graph der Funktion f ist gegeben. Skizziere den Graphen der Ableitungsfunktion f′ in dasselbe Koordinatensystem.



6 Die Funktion f mit $f(x) = 1{,}5x^2$ gibt die Strecke (in m) an, die ein Auto x Sekunden nach dem Start zurückgelegt hat. Berechne $f'(2)$ und beschreibe die Bedeutung dieses Wertes.

$f'(2) =$ ____________________

Bedeutung im Kontext: ____________________

____

7 Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^3 + 2x^2 + 18$ gibt für $0 \leqq x \leqq 12$ näherungsweise die Höhe einer Pflanze (in cm) x Wochen nach dem Einpflanzen an.

a) Berechne die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit v_D der Pflanze in den ersten 12 Wochen (in cm pro Woche).

v_D: ______________ cm/Woche

b) Berechne die momentane Wachstumsgeschwindigkeit v_6 nach 6 Wochen (in cm pro Woche).

$v_6 =$ ______________ cm/Woche

8 Untersuche, an welcher Stelle die Ableitung von $f(x) = x^2 + 2x$ ihr Vorzeichen wechselt. Welche Schlussfolgerung lässt sich hieraus für den Graphen von f ziehen?

Vorzeichenwechsel der Ableitung bei x = ________

Für x < ________ ist die Ableitung ______________

Für x > ________ ist die Ableitung ______________

Der Graph hat bei x = ________ einen ____________

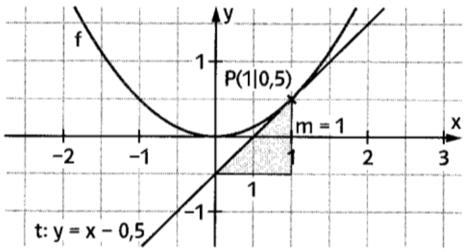
Viel Erfolg

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M6 – Veränderungen/Abl - Lösungen**	Datum:

Kontrolliere mithilfe der folgenden Musterlösungen deine Lösungen der Testaufgaben. Führe dann eine erneute Selbsteinschätzung der wichtigsten Kompetenzen im Bereich „Veränderungen untersuchen – Ableitung" durch.

1 Tangenten einzeichnen und Gleichung bestimmen

Man zeichnet zunächst den Punkt $P(1\,|\,0{,}5)$ ein. Die Tangente ist die Gerade, die den Graphen in P berührt. Mithilfe eines Steigungsdreiecks kann man erkennen, dass die Steigung der Tangente $m = 1$ beträgt. Der y-Achsenabschnitt der Tangente beträgt $n = -0{,}5$, da die y-Achse bei $y = -0{,}5$ geschnitten wird. Die Gleichung der Tangente lautet folglich:
$t(x) = 1x - 0{,}5$ bzw. $t(x) = x - 0{,}5$.



> Die **Tangente** im Punkt P ist eine Gerade, die den Graphen im Punkt P berührt.

> **Geradengleichung:**
> $y = mx + n$
> **m ist die Steigung**. Sie gibt an, um wie viele Einheiten die Gerade ansteigt oder fällt, wenn man eine Einheit nach rechts geht.
> **n ist der y-Achsenabschnitt.** Die Gerade schneidet in $S_y(0\,|\,n)$ die y-Achse.

2 Bestimmen der Ableitung nach den Ableitungsregeln

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$, also
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$
Jeder Summand wird nach der Potenzregel und der Faktorregel abgeleitet. Man muss hierbei beachten, dass der vorletzte Summand $(-x)$ sich auch als $-x^1$ schreiben lässt und dass das absolute Glied $(+4)$ beim Ableiten wegfällt. Die gesamte Ableitung ergibt sich mithilfe der Summenregel.

b) $f(x) = (x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$, also
$f'(x) = 2x$
Man muss die Klammer auflösen, bevor man die Ableitungsregeln anwenden kann.

c) $f_a(t) = at^3 + t$, also $f_a'(t) = 3at^2 + 1$
Die Variable ist hier t, a ist eine feste (aber beliebig wählbare) Zahl. Daher muss nach t abgeleitet werden. a wird beim Ableiten wie eine Zahl behandelt.

> **Potenzregel**
> $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
> **Faktorregel**
> $f(x) = r \cdot g(x)$
> $\Rightarrow f'(x) = r \cdot g'(x)$
> **Summenregel**
> $f(x) = g(x) + h(x)$
> $\Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

3 Berechnung von Tangentengleichungen mithilfe der Ableitung

Es gilt: $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 + 1 = 15$.
Der Punkt P hat somit die Koordinaten $P(2\,|\,15)$. Die Ableitung an der Stelle $x = 2$ entspricht der Steigung der Tangente im Punkt $P(2\,|\,15)$. Nach den Ableitungsregeln erhält man $f'(x) = 6x^2 - 1$ und somit $f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 1 = 23$.
Die Steigung der Tangente in P beträgt folglich $m = 23$.
Man kann nun die Koordinaten von P in die Gleichung $y = 23x + n$ einsetzen, um den y-Achsenabschnitt der Tangente zu berechnen. Man erhält:

$$15 = 23 \cdot 2 + n \qquad |-46$$
$$-31 = n$$

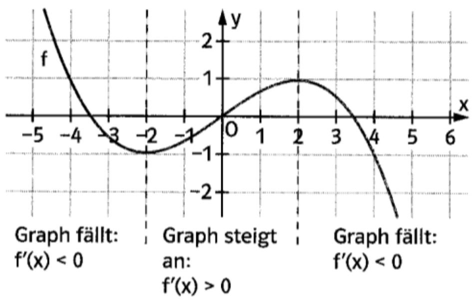
Die Gleichung der Tangente an den Graphen in $P(2\,|\,15)$ lautet folglich
$t(x) = 23x - 31$.

> Die Ableitung an der Stelle x entspricht der Steigung der Tangente im Punkt $P(x\,|\,f(x))$.

> Wenn die Steigung m bekannt ist, lässt sich der y-Achsenabschnitt der Tangente im Punkt P berechnen, indem man m und die Koordinaten von P in die Gleichung $y = mx + n$ einsetzt und nach n auflöst.

4 Am Graphen ablesen, wo die Ableitung positiv bzw. negativ ist

Für $x < -2$ fällt der Graph, daher sind hier die Tangenten an den Graphen alle fallende Geraden mit negativer Steigung und die Ableitung ist negativ.
Für $-2 < x < 2$ steigt der Graph an, daher muss hier die Ableitung positiv sein.
Für $x > 2$ fällt der Graph wieder und die Ableitung ist negativ.



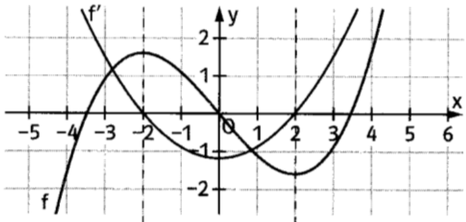
> Wenn $f'(x) > 0$ in einem Intervall I ist, dann ist f in diesem Intervall streng monoton zunehmend.

> Wenn $f'(x) < 0$ in einem Intervall I ist, dann ist f in diesem Intervall streng monoton abnehmend.

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	**M6 – Veränderungen/Abl - Lösungen**	Datum:

5 Graph der Ableitungsfunktion skizzieren

Man erkennt, dass der Graph von f für $x < -2$ steigt, daher muss für $x < -2$ die Ableitung positiv sein und der Graph von f′ oberhalb der x-Achse verlaufen.
Für $-2 < x < 2$ ist der Graph fallend, weshalb die Ableitung negativ ist und der Graph der Ableitungsfunktion unterhalb der x-Achse verläuft. Für $x > 2$ ist der Graph von f wieder ansteigend und der Graph von f′ entsprechend oberhalb der x-Achse.
Man erkennt außerdem, dass die Steigung der Tangente und somit der Wert der Ableitung im Punkt P(0 | 0) etwa −1 beträgt.
Wenn man berücksichtigt, wie steil der Graph von f steigt bzw. fällt, erhält man den rechts abgebildeten Graphen der Ableitungsfunktion.



Graph von f steigt an: $f'(x) > 0$ | Graph von f fällt: $f'(x) < 0$ | Graph von f steigt an: $f'(x) > 0$

Überlege:
Wo ist die Ableitung positiv bzw. negativ, d.h., wo muss der Graph der Ableitungsfunktion oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse verlaufen?
Wo steigt der Graph von f steil an bzw. wo fällt er steil ab (betragsmäßig große Werte der Ableitung)?
Wo steigt der Graph von f nur wenig bzw. wo fällt er wenig ab (betragsmäßig kleine Werte der Ableitung)?

6 Bedeutung der Ableitung im Sachzusammenhang

Mithilfe der Ableitungsregeln erhält man aus der Funktion $f(x) = 1{,}5\,x^2$ die Ableitungsfunktion $f'(x) = 3x$.
Wenn man in f′(x) den Wert $x = 2$ einsetzt, erhält man: $f'(2) = 3 \cdot 2 = 6$.
Die Ableitung beschreibt die momentane Änderungsrate. Die momentane Änderungsrate entspricht hier der Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$. Das Auto fährt also nach 2 Sekunden mit einer Geschwindigkeit von $6\,\frac{m}{s}$. Dies entspricht einer Geschwindigkeit von $21{,}6\,\frac{km}{h}$, denn $1\,\frac{m}{s}$ entspricht $3{,}6\,\frac{km}{h}$.

Die Ableitung entspricht der momentanen Änderungsrate.

Wenn eine Funktion die zurückgelegte Strecke innerhalb einer Zeit x beschreibt, dann gibt die Ableitung die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt x an.

7 Durchschnittliche Änderungsrate und momentane Änderungsrate

a) Die durchschnittliche Geschwindigkeit in den ersten 12 Wochen entspricht der durchschnittlichen Änderungsrate im Intervall [0; 12]. Diese erhält man, wenn man die Steigung der Sekante durch die Punkte $P_1(0\,|\,f(0))$ und $P_2(12\,|\,f(12))$ berechnet. Mit $f(0) = 18$ und $f(12) = -0{,}1 \cdot 12^3 + 2 \cdot 12^2 + 18 = 133{,}2$ erhält man die Punkte $P_1(0\,|\,18)$ und $P_2(12\,|\,133{,}2)$.
Die Steigung m der Geraden durch P_1 und P_2 beträgt also: $m = \frac{133{,}2 - 18}{12 - 0} = 9{,}6$.

Folglich beträgt die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze in den ersten 12 Wochen 9,6 cm pro Woche.
b) Die momentane Änderungsrate entspricht der momentanen Geschwindigkeit. Man erhält diese, indem man die Ableitung zum gesuchten Zeitpunkt berechnet.
Mithilfe der Ableitungsregeln erhält man aus $f(x) = -0{,}1x^3 + 2x^2 + 18$ die Ableitungsfunktion $f'(x) = -0{,}3x^2 + 4x$.
Wenn man $x = 6$ in f′(x) einsetzt, erhält man $f'(6) = -0{,}3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 = 13{,}2$.
Die Wachstumsgeschwindigkeit nach 6 Wochen beträgt also 13,2 cm pro Woche.

Die Steigung m der Sekante durch $P_1(x_1\,|\,y_1)$ und $P_2(x_2\,|\,y_2)$ entspricht der durchschnittlichen Änderungsrate im Intervall $[x_1; x_2]$.
Es gilt: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Die Steigung m der Tangente im Punkt $P(x_p\,|\,y_p)$ entspricht der momentanen Änderungsrate der Funktion f. Man erhält sie durch die Berechnung der Ableitung an der Stelle x_p, d.h. $f'(x_p)$.

8 Vorzeichen der Ableitung rechnerisch untersuchen

Mithilfe der Ableitungsregeln erhält man aus $f(x) = x^2 + 2x$ die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x + 2$. Um zu überlegen, wann $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ ist, berechnet man zunächst die Nullstellen der Ableitung.

$$
\begin{aligned}
2x + 2 &= 0 && |-2\\
2x &= -2 && |:2\\
x &= -1
\end{aligned}
$$

Was passiert nun, wenn $x < -1$ bzw. $x > -1$ ist?

Wenn man in die Ableitungsfunktion verschiedene Werte für x einsetzt, erkennt man, dass $f'(x) > 0$ ist, wenn $x > -1$ ist und $f'(x) < 0$ ist, wenn $x < -1$ ist. Es gibt also einen Vorzeichenwechsel der Ableitung bei $x = -1$. Für alle $x < -1$ ist die Ableitung negativ. Für alle $x > -1$ ist die Ableitung positiv. Der Graph fällt also links von $x = -1$ und steigt rechts von $x = -1$. Somit hat er bei $x = -1$ einen Tiefpunkt.

Strategie:
1. Berechne die Nullstellen der Ableitung.
2. Untersuche, welches Vorzeichen die Ableitung links und rechts der Nullstellen der Ableitung hat.
3. Überlege, welche Schlussfolgerung man aus den Ergebnissen in 1 und 2 für den Verlauf des Graphen ziehen kann.